

Ergebnis und Überschlag von Malaufgaben im Vergleich

Die dritte binomische Formel, entdeckt von einer 4. Klasse

DEN ZAHLENBLICK
SCHULEN
Praxis Mathematik

ab 4

Renate Motzer Wie gut trifft eine Überschlagsrechnung beim Malrechnen das »wirkliche Ergebnis«? Kinder einer 4. Klasse stellen verschiedene Überlegungen zu dieser Frage an, rechnen besondere Malaufgaben und begründen die Ergebnisse.

Wie genau ist eine Überschlagsrechnung bei der Multiplikation?

Bei Multiplikationsaufgaben kann es durchaus sein, dass der Überschlag und die eigentliche Aufgabe zu deutlich unterschiedlichen Ergebnissen führen. Vergleicht man $330 \cdot 13 = 4290$ mit $300 \cdot 10 = 3000$, so ist 4290 schon deutlich mehr als 3000. Würde die Aufgabe $330 \cdot 14 = 4620$ lauten, ergäbe der Überschlag durch herkömmliches Runden nicht einmal zwei Drittel des eigentlichen Ergebnisses.

Nun hat man hier beide Faktoren für den Überschlag abgerundet. So erscheint es offensichtlich, dass das Überschlagsergebnis kleiner ist als das Ergebnis der eigentlichen Aufgabe. Eine Konsequenz daraus könnte sein, bei Malaufgaben einen Faktor auf-, den anderen abzurunden, um so dem wirklichen Ergebnis näher zu kommen. Welche Überlegungen sich hier anschließen können, werden im Folgenden geschildert.

Eine Beispielaufgabe aus dem Sachunterricht

Beobachtung der Tageslängen

Die Kinder einer 4. Klasse machten sich Gedanken über den längsten und kürzesten Tag des Jahres und darüber, wie sich die Tageslängen im Laufe eines Jahres ändern. Daraus entwickelte

sich folgende Problemstellung: Wenn man davon ausgeht, dass der Tag im Durchschnitt eine Tageslänge von etwa 12 Stunden hat, wie viele Stunden kommen in einem Jahr zusammen? Die Aufgabe: $365 \cdot 12$ stand im Mittelpunkt unserer Überlegungen.

Als Überschlag rechneten wir $400 \cdot 10 = 4000$. Ein Faktor wurde also deutlich auf-, der andere Faktor ein bisschen abgerundet. Ergibt die eigentliche Aufgabe nun mehr oder weniger? Die Antwort war zunächst: »Es muss weniger rauskommen«, denn es wurde deutlich mehr auf- als abgerundet. Nur ein Schüler meinte, das Ergebnis müsse größer als 4000 sein. Er hatte es schon berechnet.

Weitere Aufgaben zum gleichen Überschlag

Nun sollte jedes Kind die Aufgabe rechnen und sich dann auf die Suche nach weiteren Aufgaben machen, die zum Überschlag $400 \cdot 10 = 4000$ passen. Dazu sollten sie Aufgaben finden, bei denen auf 400 aufgerundet und auf 10 abgerundet wird und deren Ergebnis oberhalb/unterhalb von 4000 liegt.

Schnelle Kinder konnten überlegen, wie das knappste Ergebnis unterhalb 4000 sein könnte. Andere wollten das größt- und kleinstmögliche Ergebnis finden. Dabei wurde einiges entdeckt: Das kleinstmögliche Ergebnis ist $350 \cdot 11 = 3850$ (schon nahe an 4000), das größte $399 \cdot 14 = 5586$ (deutlich darüber). Ein Ergebnis unter 4000 erreicht man nur mit dem zweiten Faktor 11, da $350 \cdot 12$ bereits 4200 ergibt. Den ersten Faktor kann man bis 363 erhöhen, um ein Ergebnis unter 4000 zu erreichen (3993), die meisten Ergebnisse zu den unter oben genannten Bedingungen gesuchten Aufgaben liegen über 4000.

Insgesamt konnte Folgendes festgestellt werden: Wie der kleinere Faktor gerundet wird, scheint viel mehr auszumachen als die Rundung des größeren Faktors.

Neben dem Üben der schriftlichen Multiplikation kamen in dieser Unterrichtseinheit auch Fragen nach Zusammenhängen zwischen Aufgaben auf: Wenn man schon weiß, dass $360 \cdot 11 = 3960$ ist, wie kann man dann $363 \cdot 11$ bestimmen?

Die Materialien zu diesem Beitrag

M 1 Überschlag und Ergebnis im Vergleich ☐

M 2 Besondere Malaufgaben ☐

Weiterführung

Hätte jemand die Ergebnisse untereinander verglichen (10 000, 9999, 9996, 9991, 9984, 9975), so hätte er übrigens entdecken können, dass von einem zum nächsten immer die nächste ungerade Zahl abgezogen wird (erst -1 , dann -3 , -5 usw.). Das hängt auch damit zusammen, dass sich die Quadratzahlen (die von der Ausgangsaufgabe abgezogen werden) als Summen der ungeraden Zahlen ab 1 zusammensetzen. Aber das wäre wieder eine eigene Stunde für sich, die freilich auch mit einem quadratischen Muster zusammenhängt:



Bzw. wie oft kann man 11 noch zu 3960 dazu rechnen, um unter 4000 zu bleiben?

Eine Quadrataufgabe als Überschlag Gleiche Ergebnisse?

Durch diese Überlegungen wurde ein großes Feld weiterer interessanter Fragen eröffnet: Wie ist es nun, wenn beide Faktoren etwa gleich groß sind?

Die Kinder bestimmten zunächst $100 \cdot 100$. Als nächstes wurde die Aufgabe $101 \cdot 99$ an die Tafel geschrieben, dann $102 \cdot 98$. Es herrschte die einhellige Meinung, auch diese beiden Aufgaben hätten das Ergebnis 10 000. Die Kinder setzten die Reihe um weitere drei Aufgaben fort und überprüften ihre These.

Wer alle fünf Aufgaben berechnet hatte, konnte ausgehend von $50 \cdot 50$ prüfen, ob hier ein ähnlicher Zusammenhang herrscht. Fast ohne es zu merken, wurde dabei eifrig die schriftliche Multiplikation geübt.

Ein Bedürfnis nach einer Begründung

Eine Schülerin bemerkte sehr bald, dass die Ergebnisse doch ein bisschen von 10 000 abwichen. Sie kam zu mir und wollte wissen, warum das so sei, wo sich doch das Auf- und Abrunden so ausgleichen würde. Ich versprach ihr, dass wir nach einer Begründung suchen würden, und freute mich, dass sich in ihr ein echtes Begründungsbedürfnis aufgetan hatte.

Ein Schüler hatte nach der Aufgabe $101 \cdot 99 = 9999$ die Vermutung, dass $102 \cdot 98$ dann 9998 ergeben müsse. Er konnte seine These unmittelbar prüfen und schließlich modifizieren.

Ein erster Begründungsansatz

Ein anderer Schüler schloss: »Klar kann da nicht 10.000 rauskommen, denn $9 \cdot 1 = 9$, also muss die letzte Ziffer 9 sein.« Diese Überlegung führte auch bei $102 \cdot 98$ und bei $103 \cdot 97$ zum richtigen Ergebnis. Bei $104 \cdot 96$ schloss er dann auf 9994. Der Vergleich mit dem richtigen Ergebnis 9984 zeigte ihm, dass seine Überlegung noch nicht vollständig war.

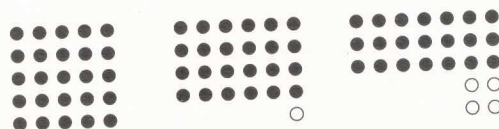
Der Zusammenhang ist durchschaut

Als ich bei der gemeinsamen Besprechung der Ergebnisse schließlich fragte, was den Kindern aufgefallen sei, dachte ich zunächst an Äußerungen wie: »Die Ergebnisse werden immer kleiner, je weiter die Zahlen auseinanderliegen.« Doch manche wussten es inzwischen genauer: »Man muss den Abstand zur 100 mit sich selbst multiplizieren und das ist dann der Wert, der zu 10 000 fehlt.« Wir prüften diese Aussage an allen Ergebnissen, die bisher an der Tafel standen. Sie stimmte haargenau. Auch bei den Aufgaben, die von $50 \cdot 50$ ausgingen, konnten wir diese Be-

hauptung verifizieren. Wir überlegten dazu, wie das Ergebnis jeweils lauten müsste, und die Kinder, die die Aufgaben schon gerechnet hatten, konnten es bestätigen.

Eine Begründung am Rechteckmuster

Jetzt wollte ich mit den Kindern aber wie versprochen nach einer Begründung suchen. Wir gingen zu einfacheren Aufgaben über: $5 \cdot 5 = 25$. Die Aufgaben in der logischen Reihe lauten hier $6 \cdot 4$ und $7 \cdot 3$, wie die Kinder feststellten. Durch Rechnen konnte geprüft werden, dass die soeben erkannte Regel auch bei diesen Aufgaben gilt. Mit Plättchen wurde das Quadrat zur $5 \cdot 5$ an die Tafel geheftet. Jetzt sollte $6 \cdot 4$ daraus gemacht werden. Ein Schüler nahm die unterste Reihe weg und hängte die Plättchen rechts an. Da aber für die neue Spalte nur vier Plättchen benötigt wurden, blieb ein Plättchen übrig. Dann wurde noch einmal die ursprüngliche Aufgabe dargestellt. Nimmt man gleich zwei Reihen weg und ergänzt stattdessen zwei Spalten, bleibt ein $2 \cdot 2$ -Quadrat übrig.



Meine Bemerkung, dass wir das, was wir hier mit dem $5 \cdot 5$ -Quadrat gemacht haben, auch mit dem $100 \cdot 100$ -Quadrat machen könnten, wurde mit einem gewissen Schmunzeln kommentiert, da dies doch sehr aufwändig sei.

Rückblick

Am Ende der Unterrichtsstunde sagte ich den Kindern, dass sie heute eigentlich die 3. binomische Formel entdeckt hätten, die man an höheren Schulen ab der 7. Klasse bespricht ($(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$). Sie dürften also auf sich stolz sein. Ein Schüler meinte nur: »Warum eigentlich? Es war doch ganz einfach.«

Dass dieser Schüler den Zusammenhang so schnell durchschaut hat, war sicher ein Glücksfall; dass alle Kinder Multiplikationsaufgaben üben, war jedoch geplant. Da es für die Kinder spannend war, die Ergebnisse zu ermitteln, um ihre Ausgangsthese zu testen, geschah das Üben eher »nebenbei«.

Die Stunde konnte ohne jeden Einsatz von Arbeitsblättern durchgeführt werden. Im Anschluss finden sich dennoch mögliche Arbeitsblätter (M 1 und M 2), die den Verlauf der Stunde veranschaulichen.

Autorin

Dr. Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 14
86159 Augsburg
E-Mail: Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de

Datum

bei

[illegible]

aut

[illegible]

all

te

de

1